

Elektromagnetische Wechselwirkungen

Eine mechatronische Sichtweise

Jörg Grabow

Fachgebiet Mechatronik
 Fachbereich Maschinenbau
 Ernst-Abbe-Hochschule Jena, University of Applied Sciences

Elektrische und magnetische Systeme lassen sich zunächst als unabhängige Basissysteme beschreiben. Die Modellbildung erfolgt immer in fünf Einzelschritten. Anschließend können die unabhängigen Basissysteme mittels des gekoppelten Energieflusses transformatorisch oder gyratorisch verbunden werden. Dabei ist es unabhängig, ob die Modellbildung mit konzentrierten oder verteilten Parametern erfolgt.

[Basissysteme, konstitutive Gesetze, Feldformulierung, Feldkopplung]

1 GRUNDLAGEN

Die Beschreibung elektromagnetischer Kopplungen erfolgt unter Zuhilfenahme von physikalischen Einzelsystemen. Darunter wollen wir eine abgegrenzte, untersuchbare Einheit verstehen, welche bezüglich ihrer Eigenschaften analysiert werden kann. Das zu untersuchende physikalische System hat immer einen realen Bezug, da es sich auf Phänomene der realen Welt (elektromagnetische Wechselwirkungen) bezieht.

Um die Komplexität zu reduzieren, bedienen wir uns dabei eines physikalischen Modells des realen physikalischen Systems (elektromagnetische Wechselwirkungen). Das Modell stellt somit eine abstrakte Repräsentation der Realität dar. Die Wahl des Abstraktionsgrades soll davon abhängen, welche Aspekte der behandelten Phänomene am besten veranschaulicht werden sollen. Somit ist das vorgestellte Modell nur für einen bestimmten Anwendungszweck geeignet oder auch nicht geeignet.

Die Existenz von physikalischen Phänomenen und Eigenschaften in der Natur ist unabhängig von unserem Bewusstsein oder unseren Konventionen. Die Naturgesetze existieren unabhängig von unserer Wahrnehmung oder unserem Verständnis. Somit ist die Wahl der physikalischen Größen und deren Definitionen ein menschliches Konstrukt. Diese Konstrukte basieren zudem sehr oft auf unseren Beobachtungen und Messungen. Die physikalischen Größen sind jedoch nicht inhärent in der Natur selbst. Alle nachfolgend eingeführten Größen sind somit messbare

oder quantitative Beschreibungen des physikalischen Systems „Elektromagnetische Wechselwirkungen“.

1.1 MODELL EINES BASISSYSTEMS

Physikalische Größen können über verschiedene Unterscheidungsmerkmale systematisiert werden. Dazu gehören die Merkmale

- Quantität (extensive Größen)
- Intensität (intensive Größen)
- Einpunktvariable (Messbarkeit in einem Punkt)
- Zweipunktvariable (Messbarkeit durch zwei Punkten)
- Stoffmodell

Mittels der Größe Energie und den fünf Unterscheidungsmerkmalen kann ein Modell eines unabhängigen Basissystems gebildet werden (Grabow 2023). Die Modellbildung erfolgt zweckmäßigerweise in fünf Schritten.

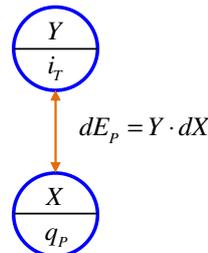
Schritt 1: Festlegung der Primärgröße

Basisgröße X



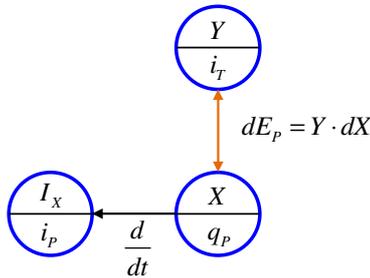
Schritt 2: Bildung der unabhängigen Energieform E_p

Basisgröße Y



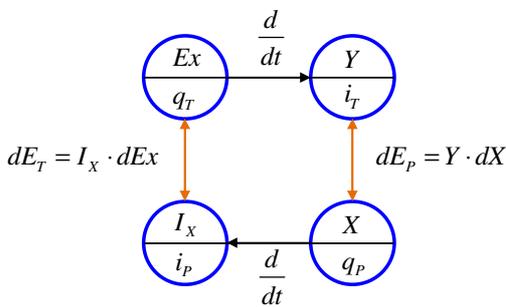
Schritt 3: Bildung der Flussgröße

Basisgröße I_X



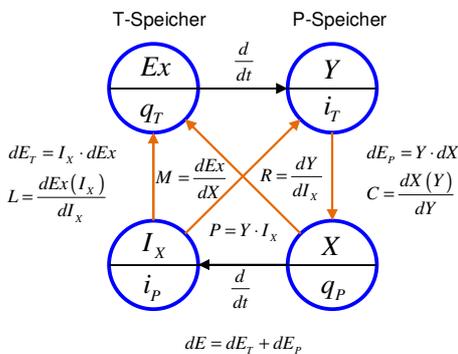
Schritt 4: Bildung der unabhängigen Energieform E_T

Basisgröße Ex



Schritt 5: konstitutive Gesetze

Basisgrößen L, C, R, M



1.2 DAS ELEKTRISCHE BASISSYSTEM

Das elektrische Basissystem (Abb. 1) basiert auf der Primärgröße elektrische Ladung Q_{el} . Als Primärgröße ist die elektrische Ladung immer mit Materie verbunden. Sie kann dabei positive oder negative Werte annehmen. Weiterhin hat die elektrische Ladung die Eigenschaft einer gequantelten Größe, d.h. alle elektrischen Ladungen sind ganzzahlige Vielfache der Elementarladung. Die Ladungsverteilung kann mittels der Ladungsdichte beschrieben werden, einer weiteren Eigenschaft der Primärgröße X . Über die fünf Schritte der Modellbildung wird das Modell eines unabhängigen Basissystems abgeleitet (Abb. 1).

Obwohl in der Realität Wechselwirkungen zu weiteren Basissystemen bestehen, kann unter Vernachlässigung der Wechselwirkungen, ein elektrisches System umfassend in nur einem Basissystem beschrieben werden. Wie die mathematischen Zusammenhänge des Basissystems zeigen, reichen dazu immer zwei der vier Grundgrößen aus. Historisch haben sich die beiden Intensitätsgrößen elektrische Strom und elektrische Spannung dafür etabliert.

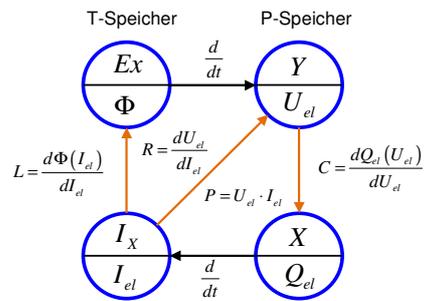


Abbildung 1. Elektrisches Basissystem

Mittels konstitutiver Gesetze (Schritt fünf) werden Energiespeicher (die Bauelemente L und C) und dissipative physikalische Größen (Bauelemente R und M) eingeführt. Diese Bauelemente sind nicht mit den realen Bauteilen der Elektrotechnik zu verwechseln. Es sind vielmehr idealisierte Konstrukte mit fest definierten Eigenschaften. So speichern die Bauelemente Kapazität (C) und Induktivität (L) im Basissystem ihren jeweiligen Energieanteil. Das Bauelement Widerstand (R) ist ein rein dissipatives Bauelement, welches die im Basissystem gespeicherte elektrische Energie dissipiert und in thermische Energie umwandelt.

Reale elektrische Bauteile bestehen im Allgemeinen aus einer Kombination von idealen elektrischen Bauelementen. So hat eine reale Spule nicht nur induktive Eigenschaften, sondern durch die ohmschen Drahtverluste auch die dissipativen Eigenschaften eines Widerstandes. Weiterhin bilden benachbarte Wicklungen jeweils untereinander eine Kapazität. Nachfolgend werden jedoch nur die drei idealen Bauelemente R, L, C betrachtet. Bei den induktiven Speicherelementen L fällt auf, dass sie neben der elektrischen Größe elektrischer Strom I_{el} über die magnetische Größe magnetischer Fluss Φ definiert werden.

$$L := \frac{d\Phi}{dI_{el}}$$

Da der magnetische Fluss jedoch mit der elektrischen Spannung verknüpft ist (Abb. 1) und im Allgemeinen nur die beiden Intensitätsgrößen verwendet werden, wird dieser Sachverhalt oft nicht sichtbar.

$$L = \frac{1}{I_{el}} \int U_{el} dt$$

2 DAS MAGNETISCHE BASISSYSTEM

Das magnetische Basissystem (Abb. 5) beruht auf der Primärgröße *magnetische Ladung* Q_m . Die physikalische Größe magnetische Ladung bedarf einer etwas ausführlicheren Beschreibung.

Bei der magnetischen Ladung handelt es sich um eine physikalische Größe, welche messbare quantitative Eigenschaften hat (Fischer 1950). Dabei muss betont werden, dass sowohl Körper als auch Teilchen, welche eine magnetische Nettoladung tragen nicht existieren. In der Literatur (Sommerfeld 1964) existieren weitere Begriffe für die magnetische Ladung. Häufig wird sie auch als Polestärke P_H bezeichnet. Eine sehr anschauliche Beschreibung liefert Maxwell selbst: „Die Menge Magnetismus, die ein Pol eines Magnets beherbergt, ist stets der Größe nach gleich und dem Zeichen nach entgegengesetzt der Menge Magnetismus, die der andere Pol desselben in sich birgt. Allgemeiner: In jedem Magnete ist die Gesamtmenge an Magnetismus algebraisch genommen gleich Null.“ (Maxwell 1883)

Wie können wir uns nun eine magnetische Ladung vorstellen, obwohl ein Körper oder ein Teilchen keine Nettoladung besitzt? Dazu betrachten wir den Versuch mit einer Helmholtz-Spule (Abb. 4).

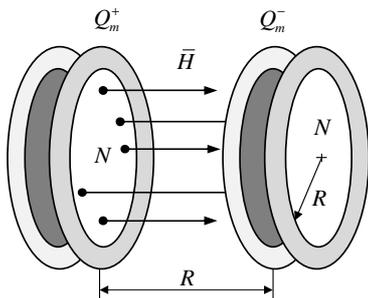


Abbildung 4. Versuchsaufbau einer Helmholtz-Spule

Zwei kurze kreisförmige Spulen mit dem Radius R werden auf derselben Achse im Abstand R parallel aufgestellt und gleichsinnig bestromt. Zwischen den beiden Spulen bildet sich ein annähernd homogenes magnetisches Feld mit der magnetischen Feldstärke \vec{H} aus. Dieses ist vergleichbar mit dem homogenen elektrischen Feld \vec{E} zwischen zwei Kondensatorplatten. Wir können also der linken senkrechten Austrittsfläche der Innenseite einer Spule magnetisch positiver Ladung Q_m^+ und der rechten senkrechten Eintrittsfläche der zweiten Spule magnetisch negative Ladungen Q_m^- zuordnen. Trotzdem bleibt die Forderung nach der Geschlossenheit der magnetischen Feldlinien erhalten. Das Feld schließt sich über die beiden Außenseiten der Einzelspulen.

Mit der Festlegung der magnetischen Ladung Q_m als Primärgröße X kann wiederum über die fünf Schritte der Modellbildung das unabhängige Basissystem abgeleitet werden (Abb. 5). Dieses System unterliegt jedoch

gewissen Einschränkungen. Diese Einschränkungen lassen sich am besten in der Feldformulierung des Basissystem diskutieren (Abb. 7).

Da keine freien magnetischen Ladungen existieren, existiert auch kein magnetischer Leitungsstrom I_{mL} . Somit existiert auch kein magnetischer Widerstand R_m . Wir kommen später nochmals auf diesen wichtigen Sachverhalt zurück. Die Einführung der magnetischen Ladung erfolgte an einer Helmholtz-Spulenordnung, welche ein homogenes magnetisches Feld erzeugte, ähnlich der Anordnung in einem Plattenkondensator.

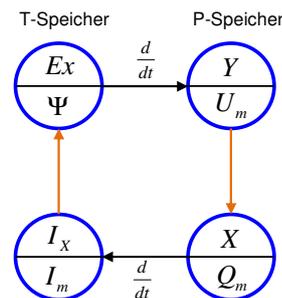


Abbildung 5. Magnetisches Basissystem

Diese Anordnung kann auch als magnetische Kapazität interpretiert werden. Eine zeitliche Änderung der magnetischen Feldstärke

$$\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

führt zu einem magnetischen Verschiebungsstrom I_{mV} zwischen den beiden inneren Spulenflächen.

$$\vec{J}_{mV} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Ein Nachweis kann sehr einfach darüber erfolgen, indem eine Leiterschleife parallel zu den Spulenflächen in das Magnetfeld gebracht wird. Der magnetische Verschiebungsstrom I_{mV} erzeugt ein elektrisches Feld \vec{E} welches wiederum über eine elektrische Spannung U_{el} (Induktionsspannung) am Ende der Leiterschleife gemessen werden kann (Abb. 6).

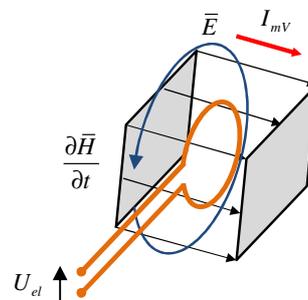


Abbildung 6. Anordnung zur Messung des Verschiebungsstromes

Die Induktionsspannung ist dabei so gerichtet, dass sie der Ursache (magnetische Feldstärkeänderung) entgegenwirkt. In differenzielle Form führt dieser Sachverhalt auf die dritte Maxwell'sche Gleichung (Induktionsgesetz).

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Für das magnetische Basissystem in Felddarstellung wird die Primärgröße magnetische Ladung auf eine Fläche bezogen. Im elektrischen System entspricht das Hüllflächenintegral der elektrischen Flussdichte \vec{D} über eine beliebig geschlossene Fläche der im umschlossenen Volumen enthaltenen Gesamtladung.

$$\Psi = \oint_A \vec{D} d\vec{A} = Q_{el}$$

Da jedoch eine magnetische Nettoladung nicht existiert,

$$\oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0$$

darf zur Bestimmung des magnetischen Flusses Φ nur über die Fläche der Ein- bzw. austretenden Feldlinien integriert werden. Im Beispiel der Helmholtz-Spule nur über die jeweiligen Innenseiten der beiden Spulen. Der magnetische Fluss Φ entspricht in diesem Fall genau der zuvor eingeführten magnetischen Ladung Q_m .

$$\Phi = \int_A \vec{B} d\vec{A} = Q_m$$

Somit wird aus dem magnetischen Verschiebungsstrom I_{mV} die magnetische Flussänderung $\dot{\Phi}$. Das Induktionsgesetz (dritte Maxwell'schen Gleichung) vereinfacht sich zur bekannten Form

$$U_l = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Unter Berücksichtigung der besonderen Eigenschaften des magnetischen Systems ändert sich die Darstellung des Basissystems bei der Primärgröße und der Flussgröße (Abb. 7).

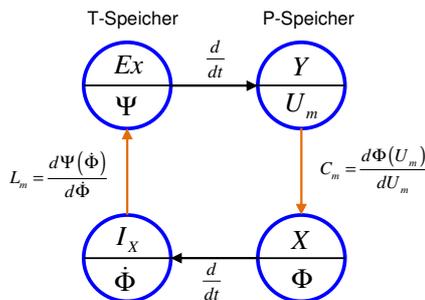


Abbildung 7. Magnetisches Basissystem

In diesem System können die bekannten Bauelemente L_m und C_m über die konstitutiven Gesetze eingeführt werden. Der magnetische Widerstand R_m entfällt aus den zuvor beschriebenen Gründen.

Als Beispiel für die Verwendung des magnetischen Basissystems sei ein Toroid aus einem ferromagnetischen Material (Ferit) betrachtet (Abb. 8). Dabei sei es zunächst unerheblich, ob der konstante magnetische Fluss Φ durch einen Permanentmagnet oder durch eine Drahtwicklung erzeugt wird.

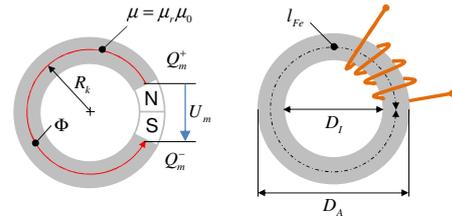


Abbildung 8. Toroid aus ferromagnetischem Material

Mit einem konstanten Eisenquerschnitt A_{Fe} und einer mittleren Eisenlänge l_{Fe} kann die magnetische Kapazität analog zum elektrischen Plattenkondensator berechnet werden.

$$C_m = \mu \frac{A_{Fe}}{l_{Fe}} = \mu_r \mu_0 \frac{A_{Fe}}{2\pi R_k}$$

Das zugehörige Schaltbild zeigt Abb. 9.

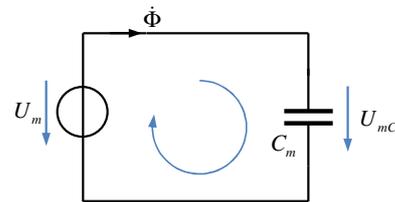


Abbildung 9. Ersatzschaltbild des Toroid als Kapazität

Im statischen Fall, d.h. keine Änderung der magnetischen Feldstärke im Feritkern, ist der Verschiebungsstrom null (siehe Abb. 6) und damit auch $\dot{\Phi}$ gleich null. Die in der linearen magnetischen Kapazität gespeicherte Energie kann analog zur elektrischen Kapazität über

$$E_p = \frac{1}{2C_m} \Phi^2$$

bestimmt werden.

In der Literatur werden sehr häufig Ersatzschaltbilder von magnetischen Kreisen mit magnetischen Widerständen verwendet. Als Begründung wird das Hopkinson'sche Gesetz angeführt, welches eine ähnliche Form wie das ohmsche Gesetz aufweist. Der magnetische Widerstand wird dann über die Beziehung

$$R_m = \mu \frac{l}{A}$$

eingeführt, welche eine ähnliche Struktur wie der elektrische Widerstand aufweist. Diese Darstellung ist aus mehreren Gründen nicht sinnvoll.

- Es existieren keine freien magnetischen Ladungsträger und damit kein magnetischer Leitungsstrom.
- Ein Widerstand ist immer ein dissipatives Bauelement, welches die zugeführte Leistung in Wärmeenergie umwandelt.
- Ein Widerstand kann keine Energie speichern.

Auch die Ähnlichkeit der mathematischen Beziehung des magnetischen Widerstandes zum elektrischen Widerstand ist nicht haltbar. Die Gleichung des elektrischen Widerstandes enthält neben der Geometrie noch den spezifischen elektrischen Widerstand. In der Formulierung des magnetischen Widerstandes steht jedoch eine Suszeptibilität, welche ein Maß für die gespeicherte Feldenergie ist.

Oliver Heaviside hat schon vor 129 Jahren wie folgt formuliert:

„NOTE 5. MAGNETISCHE RELUKTANZ

Es gibt unter den heutigen Autoren den Trend, dass die erweiterte Bedeutung des Wortes Widerstand einen Ursache / Wirkungseffekt beschreibt. Das ist sehr bedauerlich, weil der Begriff Widerstand im Elektromagnetismus bereits etabliert ist und den strengen Zusammenhang einer reibungsbehafteten Energiedissipation beschreibt. Was die die populäre Bedeutung des Widerstandes meint, ist die Übereinstimmung von Dimensionen etc.

Ich würde vorschlagen, dass das, was wir derzeit den magnetischen Widerstand nennen, nun mit magnetischer Reluktanz bezeichnen und wenn es sich auf ein Volumen bezieht, die reluctancy [oder reluctivity].“ (Heaviside 1894)

Schließt man sich diesen Überlegungen an, so sollte der Begriff des magnetischen Widerstandes, als auch sein Gebrauch in Ersatzschaltung, nicht mehr verwendet werden. Bei der Verwendung des Begriffes Reluktanz ist darauf hinzuweisen, dass es sich um eine inverse Kapazität handelt.

$$\text{Reluktanz} = \mu \frac{l}{A} = \frac{1}{C_m}$$

3 DIE ELEKTROMAGNETISCHE KOPPLUNG

In einem weiteren Schritt sollen die bisher unabhängigen Basissysteme (elektrisches System, magnetisches System) miteinander gekoppelt werden. Es soll also ein Energiefluss zwischen beiden Systemen stattfinden. Dazu stellen wir uns vor, dass die Energie im magnetischen System in einer magnetischen Kapazität

$$E_m = \frac{1}{2 \cdot C_m} \Phi^2$$

und die Energie im elektrischen System in einer elektrischen Induktivität

$$E_e = \frac{1}{2 \cdot C_e} Q^2$$

gespeichert ist (Abb. 10).

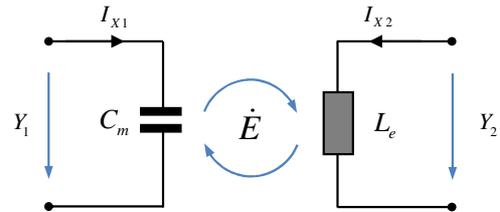


Abbildung 10. Kopplung zweier Energiespeicher

Wie findet der Energieaustausch zwischen beiden Systemen statt?

Bei einem Energieaustausch zwischen zwei Speichern mit unterschiedlichem Speicherverhalten $C_1 - L_2$ oder $L_1 - C_2$ liegt eine gyratorische Kopplung vor (Grabow 2023). Es sind also jeweils Potenzialgrößen und Flussgrößen miteinander verkoppelt.

$$Y_1 \sim I_{X2}$$

$$Y_2 \sim I_{X1}$$

Der Proportionalitätsfaktor ist die Wicklungsanzahl N der umschließenden Leiterschleifen.

$$U_m = N \cdot I_e = \Theta \quad \text{Gl. I}$$

$$U_e = N \cdot \dot{\Phi} \quad \text{Gl. II}$$

Gl. I wird auch als das Amper'sche Gesetz bezeichnet, Gl. II kennen wir unter dem Begriff Induktionsgesetz. Die Abb. 11 zeigt die Kopplung beider Basissysteme über den gyratorischen Zusammenhang.

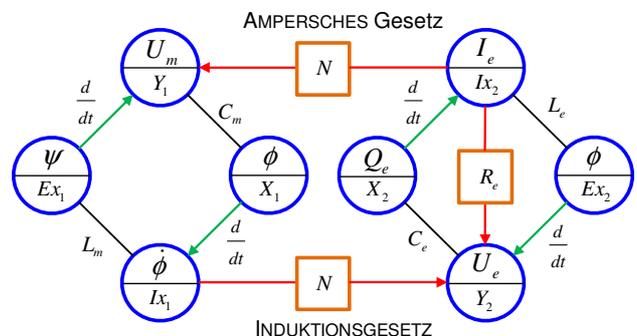


Abbildung 11. gyratorische Kopplung beider Basissysteme

Dabei fällt auf, dass in elektrischen Basissystemen magnetische Größen und in magnetischen Basissystemen elektrische Größen auftauchen, welche durch die Kopplung redundant werden. Diese können ersatzlos gestrichen werden, ohne die Gesetzmäßigkeiten der Basissysteme zu verletzen (Abb. 12).

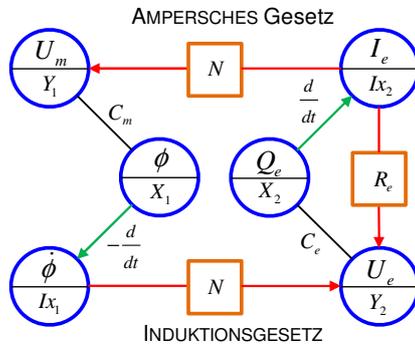


Abbildung 12. reduzierte gyratorische Kopplung

Die Reduktion geht jedoch mit dem Verlust der beiden Bauelemente elektrischer Induktivität und magnetischer Induktivität einher. Tatsächlich gehen die in die induktiven Eigenschaften nicht verloren wie später gezeigt wird.

Zunächst werden die gekoppelten Basissysteme aus Abb. 12 in ein gekoppeltes System mit verteilten Parametern (Grabow 2023) überführt (Abb. 13). In dieser Darstellung finden wir sofort die Maxwell'schen Gleichungen wieder.

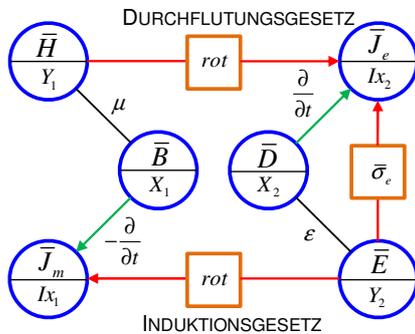


Abbildung 13. Kopplung über Maxwell'sche Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \text{div} \vec{D} = \vec{p} \quad \text{I}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \text{div} \vec{B} = \vec{0} \quad \text{II}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{III}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{\sigma}_e \cdot \vec{E} \quad \text{IV}$$

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

Die Maxwell'schen Gleichungen in einem elektromagnetischen System mit verteilten Parametern entsprechen genau der gyratorischen Kopplung in einem gekoppelten System mit konzentrierten Parametern.

Auch in den Maxwell'schen Gleichungen tauchen nur die zwei Suszeptibilitäten ϵ und μ auf. Hier scheinen die elektrische und magnetische Induktivität ebenso zu fehlen. Tatsächlich existieren beide Eigenschaften weiterhin aufgrund der Kopplung beider Systeme.

3.1 ELEKTRISCHE INDUKTIVITÄT

Abb. 11 zeigte den gyratorischen Kopplungsvorgang zwischen den elektrischen und magnetischen Systemen. Konzentrieren wir uns zunächst auf die magnetische Kapazität C_m . Durch die gyratorische Kopplung kann diese magnetische Kapazität auf die elektrische Seite transformiert werden (Abb. 13).

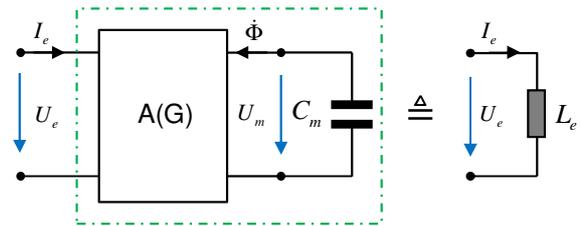


Abbildung 14. Ersatzschaltung einer magnetischen Kapazität

Eine magnetische Kapazität stellt sich auf der elektrischen Seite als elektrische Induktivität dar. Diese Induktivität kann sehr einfach zum Beispiel über die Kettenparameter des Gyrators bestimmt werden.

$$\begin{bmatrix} U_m \\ -\dot{\phi} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & N \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{bmatrix} U_e \\ I_e \end{bmatrix}$$

$$L_e = \frac{A_{12}}{A_{21}} \cdot C_m = N^2 \cdot C_m$$

Die elektrische Induktivität ist also kein eigenständiges Speicherbauelement des elektrischen Basissystems, sondern tatsächlich eine magnetische Kapazität, welche über die gyratorische Kopplung des elektromagnetischen Systems in das elektrische System transformiert wird. Dabei muss wieder strikt zwischen Bauelement und Bauteil unterschieden werden. Eine reale Spule weist weiterhin eine elektrische Induktivität auf. Nur das zugrunde liegende physikalische Prinzip, basiert auf einer magnetischen Kapazität.

Betrachten wir dazu einen geschlossenen Ringkern aus Abb. 8. Die magnetische Kapazität konnte zu

$$C_m = \mu \frac{A_{Fe}}{l_{Fe}} = \mu_0 \mu_r \frac{A_{Fe}}{2\pi R_k}$$

berechnet werden. Nutzen wir nun die gyratorische Kopplung aus Abb. 14, so berechnet sich die Induktivität einer realen Spule mit diesem Ringkern zu

$$L_e = \mu_0 \mu_r \frac{A_{Fe}}{2\pi R_k} \cdot N^2 = C_m N^2.$$

Dabei wird der Ausdruck $\mu \frac{A_{Fe}}{l_{Fe}}$ in der Praxis oft auch als A_L -Wert bezeichnet. Tatsächlich ist es eine magnetische Kapazität. Noch kritischer ist die Interpretation des A_L -Wert als Kehrwert des magnetischen Widerstandes zu hinterfragen.

3.2 DIE MAGNETISCHE INDUKTIVITÄT

Äquivalent zur Herleitung der elektrischen Induktivität, kann eine elektrische Kapazität über die gyratorische Kopplung auf ein magnetisches Basissystem abgebildet werden (Abb. 15).

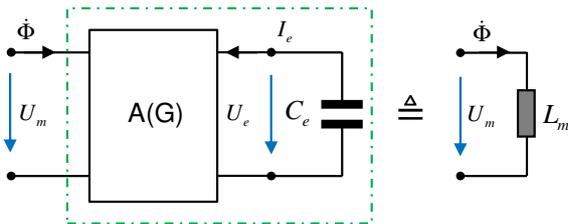


Abbildung 15. Ersatzschaltung einer magnetischen Induktivität

Würden wir uns nur in einem reinmagnetischen Basissystem bewegen, so würden wir elektrische Kapazitäten als magnetische Induktivitäten wahrnehmen. In einer rein elektrischen Welt fällt uns diese Vorstellung sehr leicht. Die Bauelemente R_e, L_e, C_e werden als elektrische Bauelemente akzeptiert und die magnetischen Eigenschaften oft ausgeblendet. In einer rein magnetischen Welt müssen demzufolge die elektrischen Eigenschaften ausgeblendet werden. Somit bleiben L_m und C_m übrig, wobei R_m aufgrund fehlender freier magnetischer Ladungen nicht existiert.

4 ZUSAMMENFASSUNG

Basissysteme können über ihren Energiefluss miteinander gekoppelt werden. Dabei bestimmen immer die gekoppelten Energiespeicher das jeweilige Kopplungsprinzip (transformatorisch oder gyratorisch). Im Falle elektromagnetischer Wechselwirkungen entfallen jeweils die Induktivitäten und werden durch ihre gekoppelten Kapazitäten des jeweils anderen Basissystems ersetzt.

LITERATUR

Fischer, J. (1950). Zur Definition der magnetischen Größen. *Annalen der Physik, Volume 443, Issue 1-2, Pages 55-64, 1950*

Grabow, J. (2023). *Multipole - Modellbildung technischer Systeme*. Springer Vieweg; 1. Aufl. 2023 Edition (31. Mai 2023)

Maxwell, J.C. (1883). *Lehrbuch der Electricität und des Magnetismus*. Verlag von Julius Springer, 1883, zweiter Band

Sommerfeld, A. (1964). *Elektrodynamik*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1964

Heaviside, O. (1894) *Electrical Papers*, Vol. II., New York 1894, S. 168

Prof. Dr.-Ing. habil. Jörg Grabow

Adresse: Ernst-Abbe-Hochschule Jena, University of Applied Sciences, Fachbereich Maschinenbau, Fachgebiet Mechatronik, Carl-Zeiss-Promenade 2, 07745 Jena
E-Mail: joerg.grabow@eah-jena.de