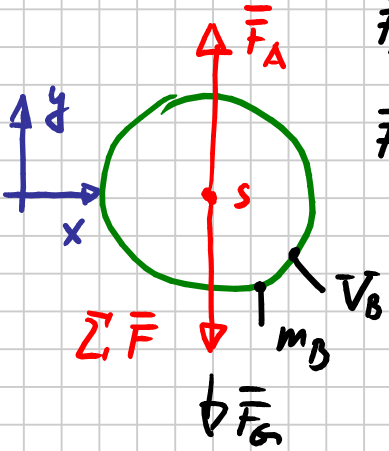
Wie hoch steigt ein Wetterballon ?

Prof. Grabow

Notiztitel 17.10.2014

① Füllvolumen am Boden



$$\vec F_A = \rho_L^0 \cdot V_B^0 \cdot g_0 \cdot \vec e_y$$

$$\left.\begin{aligned} \vec F_{He} &= -\rho_{He}^0 V_B^0 g_0 \vec e_y \\ \vec F_B &= -m_B g_0 \vec e_y \\ \vec F_{PL} &= -m_{PL} g_0 \cdot \vec e_y \end{aligned}\right\} \vec F_G$$

$$\vec F_R = -F_R \cdot \vec e_y$$

$$\vec F_G = -(\underbrace{m_B + m_{PL}}_{m_0} + \rho_{He}^0 V_B^0)\, g_0 \vec e_y = -(m_0 + \rho_{He}^0 V_B^0)\, g_0 \vec e_y$$

Kräftegleichgewicht: $\vec F_A + \vec F_G + \vec F_R = \vec 0$

$\vec e_y$: $\rho_L^0 V_B^0 g_0 = (m_0 + \rho_{He}^0 V_B^0) g_0 + F_R$

$$V_B^0 = \frac{m_0}{\rho_L^0 - \rho_{He}^0} + \frac{F_R}{g_0(\rho_L^0 - \rho_{He}^0)} \qquad \frac{F_R}{g_0} = m_R$$

$$V_B^0 = \frac{m_0 + m_R}{\rho_L^0 - \rho_{He}^0} =: V_0$$

Unbekannt F_R ??

② Steighöhe des Ballons

Luft als ideales Gas $\quad pV = nRT$

$$p_0 V_0 = p(h)\, V(h)$$

$$V(h) = \frac{p_0}{p(h)} V_0$$

Frage: Wie groß ist $p(h)$?

Vor: isotherme Atmosphäre $\quad T = const$

$$p(h) = p_0\, e^{-\frac{\Delta h}{h_s}} \qquad \Delta h = h - h_0$$

$$h_s = \frac{p_0}{\rho_0 g_0} \quad \text{Skalenhöhe}$$

max Steighöhe:

$$V(h) = \frac{p_0}{p(h)} V_0$$ platzen wenn $V(h) = V_{max}(h_{max})$

$$V_{max}(h_{max}) = \frac{p_0 V_0}{p_0 e^{-\frac{\Delta h}{h_s}}}$$

$$p_0 e^{-\frac{\Delta h}{h_s}} = p_0 \frac{V_0}{V_{max}} \qquad \ln\left(\frac{V_0}{V_{max}}\right) = -\frac{\Delta h}{h_s}$$

$$\ln\left(\frac{V_{max}}{V_0}\right) = \frac{\Delta h}{h_s} \qquad \Delta h = h_{max} - h_0 = h_s \ln\left(\frac{V_{max}}{V_0}\right)$$

$$\boxed{\text{Steighöhe: } h_{max} = h_s \ln\left(\frac{V_{max}}{V_0}\right) + h_0}$$

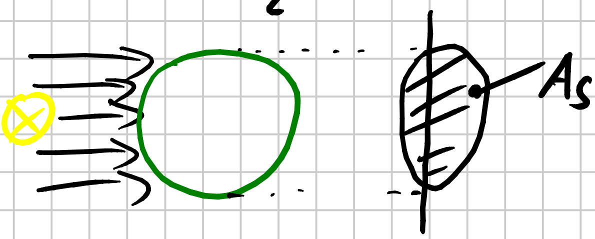
Fehler: $g_0 = const$ tatsächlich $g(h)$
$T = T_0 = const$ tatsächlich $T(h)$

Bsp. 1
$$h_0 = 0$$
$$V_0 = 4{,}52\, m^3 \mathrel{\hat=} d_0 = 2\, m$$
$$V_{max} = 523{,}6\, m^3 \mathrel{\hat=} d_{max} = 10\, m$$

$$h_{max} = 40{,}08\ km$$

③ Reibkraft

$$F_R = c_w \cdot \frac{\rho}{2} \cdot A_s \cdot v^2$$



c_w - Wert
A_s - Schattenfläche
v - Aufstiegsgeschwindigkeit
η - dyn. Viskosität
$\eta = \eta(T)$ Sutherland Formel

$c_w(Re)$

$$Re(v) = \frac{\rho d v}{\eta}$$

$$Re(v) = \frac{\rho_L^0 d_0 v_0}{\eta}$$ für $Re < 2 \cdot 10^5$ Gl. White

$$c_w = \frac{24}{Re} + \frac{6}{1+\sqrt{Re}} + 0{,}4 \qquad v_0 = \sqrt{\frac{2F_R}{\rho_L^0 A_s \cdot c_w}}$$

$$F_R = c_W \frac{\varrho_L^0}{2} A_S \cdot V_0^2$$

geg: V_0 Aufstiegsgeschw.

$V_0 \approx 5 \frac{m}{s}$

② Linearen Temperaturverlauf

$$p(h) = p_n \left(1 - \frac{a_n (h - h_n)}{T_n}\right)^{\gamma} \qquad \gamma = \frac{M g_0}{R\, a_n}$$

$$\boxed{h_{max} = \frac{T_n}{a_n}\left[1 - \left(\frac{p_0 V_0}{p_n V_{max}}\right)^{1/\gamma}\right] + h_n}$$

<u>Bsp 2:</u> Daten aus Bsp. 1

$h_{max} = 31{,}94$ km ca. 8 km weniger!

④ g(h)

$$h = \left(\frac{R_E}{R_E - h_p}\right) h_p \qquad h_p = h_{max}$$

$$\boxed{h = 32{,}1 \text{ km}}$$