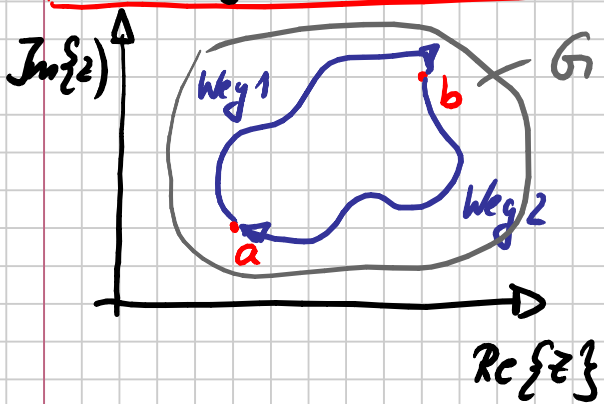
geg.: komplexe Funktion $f(z)$ z.B. $H_R(j\Omega)$

$z = x + jy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$

wichtiger Satz: Cauchyscher Integralsatz

<u>Satz:</u>

Ist $f(z)$ in allen Punkten z eines Gebietes $G \in \mathbb{C}$ holomorph, so ist $\oint f(z)\,dz = 0$



$$\int_a^b f(z)\,dz + \int_b^a f(z)\,dz = 0$$

$$\int_a^b f(z)\,dz = - \int_b^a f(z)\,d$$

Weg 1 Weg 2

holomorph: $f(z)$ ist holomorph, wenn $f(z)$ in jedem Punkt differenzierbar ist.

$\rightarrow f(z)$ – keine singulären Punkte, z.B. keine Polstellen

? $H_R(j\Omega)$ Polstellen (λ_1, λ_2)

<u>Erweiterung des Cauchyschen Integralsatzes</u>

Reihenentwicklung um die singulären Punkte: Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

z_0 – singulären Punkte

n – kann negativ sein

$$\oint f(z)\,dz = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \oint (z - z_0)^n\,dz \overset{?}{=} 0$$

z_0 – isolierte Singularitäten

- hebbare Singularitäten $\oint f(z)\,dz = 0$
- Polstellen
- wesentlichen Singularitäten

$$z = z_0 + Re^{j\varphi} \quad ; \quad dz = jRe^{j\varphi}\,d\varphi$$

$$\oint f(z)\,dz = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \int_{\varphi=0}^{2\pi} (z_0 + Re^{j\varphi} - z_0)^n \, jRe^{j\varphi}\,d\varphi$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} c_n\, j\, R^{(n+1)} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{j\varphi(n+1)}\,d\varphi$$

I ist für alle n außer $n=-1$ Null !

$n=-1$: $\quad e^{j\varphi \cdot 0} = 1 \qquad \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$

$$R^{-1+1} = 1$$

$$\oint f(z)\,dz = c_{-1}\, j\, 2\pi \overset{!}{\neq} 0$$ bleibt ein Rest "Rest" Residuum

$$\boxed{c_{-1} = \frac{1}{2\pi j} \oint f(z)\,dz =: \mathrm{Res}(f, z_0)}$$

Lemma 1: Ist z_0 ein einfacher Pol, so ist

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \cdot f(z)$$

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Modalanalyse, Pole der Ordnung k

Lemma 2: $$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \lim_{z \to z_0} \left(\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \cdot (z - z_0)^k \cdot f(z) \right)$$

Bsp. **Modalanalyse**

$$H_R(j\Omega) = \frac{1}{m} \cdot \underbrace{\frac{1}{-\Omega^2 + 2D\omega_0 j\Omega + \omega_0^2}}_{f(\lambda)} \qquad \lambda = j\Omega$$

$$f(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= -\delta + j\omega \\ \lambda_2 &= -\delta - j\omega \end{aligned}$$

Lemma 2 auf $f(\lambda)$

$$\mathrm{Res}(f,\lambda_1) = \frac{1}{2\lambda_1 + 2\delta} = \frac{1}{\cancel{-2\delta} + 2j\omega + \cancel{2\delta}} = \frac{1}{2j\omega}\Big|\frac{j}{j} = \frac{-j}{2\omega} = \mathrm{Res}$$

$$\mathrm{Res}(f,\lambda_2) = \frac{1}{2\lambda_2 + 2\delta} = \frac{1}{\cancel{-2\delta} - 2j\omega + \cancel{2\delta}} = \frac{-1}{2j\omega}\Big|\cdot\frac{j}{j} = \frac{j}{2\omega} = \mathrm{Res}^*$$

$$f(\lambda) = \frac{\mathrm{Res}}{\lambda - \lambda_1} + \frac{\mathrm{Res}^*}{\lambda - \lambda_2} \quad ; \quad f(j\Omega) = \frac{\mathrm{Res}}{j\Omega - \lambda} + \frac{\mathrm{Res}^*}{j\Omega - \lambda^*}$$

$$H_R(j\Omega) = \frac{1}{m}\cdot f(j\Omega) = \frac{R}{j\Omega - \lambda} + \frac{R^*}{j\Omega - \lambda^*}$$

$$R = \frac{1}{m}\cdot \mathrm{Res} \quad ; \quad R^* = \frac{1}{m}\mathrm{Res}^*$$

$$\underline{\underline{R = -\frac{j}{2m\omega}}} \quad ; \quad \underline{\underline{R^* = +\frac{j}{2m\omega}}}$$