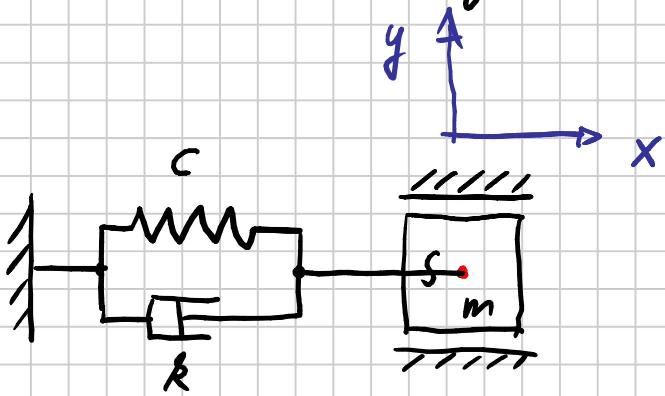
Modalanalyse

Prof. Grabow

Notiztitel 08.08.2014

Systeme mit dem Freiheitsgrad $f = 1$

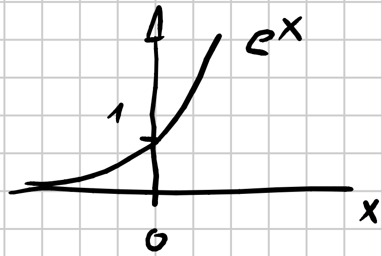
Bsp.:



Dgl.: über IS: $m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = 0$

Lösung: $x(t) = \hat{x}\, e^{\lambda t}$

$$(m\lambda^2 + k\lambda + c)\,\hat{x}\, e^{\lambda t} = 0$$



$\hat{x} \neq 0$

$e^{\lambda t} \neq 0$

$$\underbrace{m\lambda^2 + k\lambda + c = 0}_{\text{Eigenwertgleichung}}$$

λ - Eigenwerte

Lösung für $k = 0$ (keine Dämpfung)

$\lambda^2 + \frac{c}{m} = 0$ $\qquad \lambda^2 = -\frac{c}{m}$ $\qquad \lambda_{1/2} = \pm j \underbrace{\sqrt{\frac{c}{m}}}_{\omega_0} = \pm j\omega_0$

$Re\{\lambda\} = 0$

$Im\{\lambda\} = \pm\,\omega_0$

① Ist die Dämpfung $k = 0$, dann sind die Eigenwerte immer imaginär

② Der Imaginärteil des Eigenwertes entspricht der Eigenkreisfrequenz ω_0 des ungedämpften Systems.

Lösung für $k \neq 0$ (gedämpftes System)

$m\lambda^2 + k\lambda + c = 0$

$$\lambda_{1/2} = \underbrace{-\frac{k}{2m}}_{Re} \pm j \underbrace{\sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{k}{2m}\right)^2}}_{Im} = -\delta \pm j\omega$$

$\frac{k}{2m} =: \delta$ Abklingkonstante

$\sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{k}{2m}\right)^2} =: \omega$ Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems

$\frac{\delta}{\omega_0} = \frac{k}{\sqrt{c \cdot m}} =: D$ Lehrsches Dämpfungsmaß

$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$

$[\delta] = \frac{1}{s}$ $[\omega_0] = \frac{1}{s}$ $\left[\frac{\delta}{\omega_0}\right] = 1$

$[D] = 1$

① Der Imaginärteil des Eigenwertes entspricht der Eigenkreisfrequenz ω des gedämpften Systems

② Der Realteil des Eigenwertes ist ein Maß für das Abklingverhalten einer Schwingung.