Rechenregeln für Differentialquotienten

SCAN ME

Funktionen und ihre Darstellung

Funktion	$f = f(x, y, z)$
Differential von f	$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} dz$
Funktion	$x_4 = x_4(x_1, x_2, x_3)$
Differential von x_4	$dx_4 = \left(\frac{\partial x_4}{\partial x_1}\right)_{x_2,x_3} dx_1 + \left(\frac{\partial x_4}{\partial x_2}\right)_{x_1,x_3} dx_2 + \left(\frac{\partial x_4}{\partial x_3}\right)_{x_1,x_2} dx_3$
Funktion	$u = u(v, w, x)$
Differential von u	$du = \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_{w,x} dv + \left(\frac{\partial u}{\partial w}\right)_{v,x} dw + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{v,w} dx$

Rechenregeln

Umkehren
$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_{w,x} = \frac{1}{\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)_{w,x}}$

Erweitern
$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_{w,x} = \left(\frac{\partial u}{\partial w}\right)_{w,x} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)_{w,x}$

Einschieben
$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_{w,x} = -\left(\frac{\partial u}{\partial w}\right)_{v,x} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)_{u,x}$

Index Ändern
$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_{w,x} = -\left(\frac{\partial u}{\partial w}\right)_{v,x} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)_{u,x}$

Stürzen			
1.	Energiepaare bilden	$dE = X_1 \cdot dY_1 + X_2 \cdot dY_2 + \cdots$	$dE = -p \cdot dV + T \cdot dS$
2.	Zähler und Nenner tauschen	$\left(\frac{\partial Y_1}{\partial X_2}\right)_{X_1,n} \nearrow \left(\frac{\partial X_2}{\partial Y_1}\right)$	$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,n} \nearrow \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)$
3.	Hauptgrößen durch Partner ersetzen	$\left(\frac{\partial X_2}{\partial Y_1}\right) \to \left(\frac{\partial Y_2}{\partial X_1}\right)$	$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right) \to \left(\frac{\partial S}{\partial(-p)}\right)$
4.	Vorzeichenwechsel wenn Zähler und Nenner zwei intensive oder extensive Größen sind		
5.	alle im ursprünglichen Ausdruck ungepaarten Größen an Klammer anfügen	$\left(\frac{\partial Y_2}{\partial X_1}\right) \to \left(\frac{\partial Y_2}{\partial X_1}\right)_{X_2,n}$	$\left(\frac{\partial S}{\partial(-p)}\right) \to \left(\frac{\partial S}{\partial(-p)}\right)_{T,n}$
6	Ergebnis	$\left(\frac{\partial Y_1}{\partial X_2}\right)_{X_1,n} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial Y_2}{\partial X_1}\right)_{X_2,n}$	$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,n} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial(-p)}\right)_{T,n}$

Beweis Regel „Einschieben“

Wenn $u = u(v,w,x) = const.$ dann sind v,w,x nicht unabhängig. Man setze $du = 0$ bei $dx = 0$

$$0 = \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_{w,x} dv + \left(\frac{\partial u}{\partial w}\right)_{v,x} dw \quad \text{->} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_{w,x} = -\left(\frac{\partial u}{\partial w}\right)_{v,x} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)_{u,x}$$